Стерхов А.П., учитель математики
МБОУ Гимназия № 44 г. Иркутска

# Использование цепных дробей при решении нестандартных математических задач и задач олимпиадного характера

Олимпиадные задачи по математике являются очень сложными и требуют глубокого понимания математических концепций и владения определенными средствами решения. Одним из мощных и гибких средств являются цепные дроби. В данной работе продемонстрировано, как применение цепных дробей позволяет привести более оригинальное и быстрое решение олимпиадных задач по математике.

Цепные дроби имеют широкое применение в олимпиадных математических задачах. Они могут быть использованы для решения уравнений или систем уравнений, а также для исследования свойств чисел.

Непрерывная дробь (или цепная дробь) — это конечное или бесконечное математическое выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где $a_0$ — целое число, а все остальные $a_n$ — натуральные числа (положительные и целые) [1]. При этом числа $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, … называются неполными частными или элементами цепной дроби [2].

Использование цепных дробей рассмотрим на примере решения ряда конкретных олимпиадных математических задач.

**Задание 1.** (Олимпиадная задача по математике из коллекции задач «Турнира Ломоносова» Г. А. Гальперин. 7, 8, 9 классы).

Решите уравнение в целых положительных числах.

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

Решение: Представим число 10/7 в виде цепной дроби:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}.$$

Поскольку всякое рациональное число можно представить в виде конечной цепной дроби и притом единственным образом, то очевидно, что $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Теория цепных дробей позволяет находить значения числовых выражений. Так, при исследовании периода десятичной дроби, цепные дроби могут помочь в поиске закономерностей в последовательности цифр. Рассмотрим следующую задачу.

**Задание 2.** (Международная олимпиада по математике «Турнир городов», Г. А. Гальперин; Региональный турнир юных математиков памяти А.А. Кошкина для учеников 5-8 классов. Иркутск, 30.10.2024).

Чему равно значение выражения:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\vdots\;+\cfrac{1}{1991}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\vdots\;+\cfrac{1}{1991}}}}}}.$$

Решение: В каждом из слагаемых содержится одинаковая часть выражения. Заменим ее на $x$:

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=1$$

Действительно,

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1$$

.

Ответ: 1.

Приведем еще один пример использования цепных дробей при решении задач олимпиадного характера:

**Задание 3.** (Региональный турнир юных математиков памяти А.А. Кошкина для учеников 5-8 классов. Иркутск, 30.10.2024).

Решить уравнение $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}} = 7/17$, где $x, y, z \in Z$.

***Решение:*** Любое рациональное число можно представить в виде суммы целого и обыкновенной правильной дроби. Этот факт можно использовать при разложении чисел в цепную дробь.

$$\frac{7}{17} = \frac{1}{17/7} = \frac{1}{2 + 3/7} = \frac{1}{2 + \frac{1}{7/3}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}.$$

Отсюда вытекает, что x = 2; y = 2; z = 3.

При этом мы разложили в цепную дробь рациональное число 7/17. Заметим, что цепная дробь у нас положительная, и мы выделили целую часть дроби с недостатком (2 + 3/7).

Поскольку в условии задачи неизвестные величины могут принимать и отрицательные значения, попробуем теперь выделить целую часть дроби с избытком (3 – 4/7). В этом случае получим:

$$\frac{7}{17} = \frac{1}{17/7} = \frac{1}{3 - 4/7} = \frac{1}{3 + \frac{1}{-7/4}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{4}}}.$$

Отсюда вытекает еще одно возможное решение данного уравнения, где одно из неизвестных принимает отрицательное значение: x = 3; y = –2; z = 4.

***Ответ: (2; 2; 3), (3; –2; 4).***

**Задание 4.** (Олимпиада для школьников «Малый мехмат» МГУ им. В. М. Ломоносова).

В некотором тридесятом царстве государь установил, что купюры могут быть только номиналом 17 и 12 рублей. Один из жителей хочет приобрести на рынке яблоко за 1 рубль. Принимая во внимание, что как у продавца, так и у покупателя есть сколь угодно много купюр соответствующего номинала, то каким образом покупатель должен расплатиться за приобретаемый товар?

Решение: Пусть $x$ – количество купюр номиналом 17 рублей, $y$ – количество купюр номиналом 12 рублей. Тогда сумма, составленная из купюр номиналом 17 рублей, будет равна 17x, а сумма, составленная из купюр номиналом 12 рублей, будет равна 12y. Принимая во внимание условие задачи, составим уравнение: 17x + 12y = 1, где x, y – целые числа.

Для решения данного уравнения применим теорию цепных дробей. Представим число 17/12, составленное из коэффициентов уравнения, в виде цепной дроби:

$$\frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

Из выражения для цепной дроби получаем: $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 2$.

Далее определим значения выражений $P_k$ и $Q_k$ для всех k [3]:

$P_1 = a_0a_1 + 1 = 3$ $P_2 = P_1a_2 + P_0 = 7$

$Q_1 = a_1 = 2$ $Q_2 = Q_1a_2 + Q_0 = 5$
$x = (-1)^{2+1} \times 1 \times 5 = -5$; $y = (-1)^2 \times 1 \times 7 = 7$.

Таким образом, чтобы приобрести яблоко покупатель должен передать 5 купюр номиналом 17 рублей продавцу, который, в свою очередь, выдаст сдачу в размере 7 купюр номиналом 12 рублей.

В заключении отметим, что цепные дроби являются мощным инструментом для решения олимпиадных математических задач. Их использование требует хорошего понимания свойств цепных дробей и навыков их применения.

Решения представленных на сайте задач продемонстрировали как с помощью данного инструмента без особых усилий можно добиться качественных результатов.

## Литература:

1. Арнольд В. И. Цепные дроби квадратных корней из рациональных чисел и их статистика / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. 2007. — Т. 62. — № 5 (377). — С. 3–14.
2. Боташева З. Х., Аманова Б. А. Олимпиадные задачи по математике как средство развития творческого мышления студентов / З. Х. Боташева, Б. А. Аманова // Педагогическое мастерство и современные педагогические технологии. Сборник материалов III Международной научно-практической конференции. — Чебоксары: Общество с ограниченной ответственностью «Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2017. — С. 35–38.
3. Смолин Ю. Н. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для студ. Физ.-мат. фак. высших пед. учеб. заведений / Ю. Н. Смолин. — 3-е изд., испр. — М.: Флинта: Наука, 2006. — 463 с.
4. Сухова, К. И. Цепные дроби как средство обучения решению олимпиадных задач по математике / К. И. Сухова, М. В. Глебова // Современные тенденции развития системы образования: материалы Междунар. науч.-практ. конф. (г. Чебоксары, 25–28 апреля 2019 г.). — Чебоксары: Среда, 2019. — С. 205–208.