Стерхов А.П., учитель математики
МБОУ Гимназия № 44 г. Иркутска

Использование аликвотных дробей при решении олимпиадных задач по математике

Аликвотная дробь – это дробь, числитель которой равен единице. Эти дроби начали использоваться ещё в глубокой древности. Необходимость в дробных числах возникла в результате практической деятельности человека. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Чтобы разделить добычу после охоты нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.

Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это так называемые египетские (единичные) дроби, так как числитель этих дробей единица. Египетские дроби были изобретены и впервые использованы в Древнем Египте. Одним из первых известных упоминаний о египетских дробях является Математический папирус Ринда.

Первый дошедший до нас общий метод разложения произвольной дроби на египетские составляющие описал Фибоначчи в XIII веке. В современной записи его алгоритм можно изложить следующим образом:

Дробь m/n разлагается на два слагаемых: m/n = 1/(m/n) + [$m(n/m)$ – n] / [$n(n/m)$].

Здесь: (n/m) — частное от деления n на m, округлённое до целого в большую сторону, а $m(n/m) - n$ — (положительный) остаток от деления -n на m.

Метод Фибоначчи всегда сходится после конечного числа шагов и даёт искомое разложение.

Первое слагаемое в правой части уже имеет вид египетской дроби. Из формулы видно, что числитель второго слагаемого строго меньше, чем у исходной дроби. Аналогично, по той же формуле, разложим второе слагаемое и продолжим этот процесс, пока не получим слагаемое с числителем 1.

Задание 1. В качестве примера приведем разложение дроби 7/15 на несколько аликвотных дробей:

7/15 = 1/3 + 2/15 = 1/3 + 1/8 + 1/120.

Однако полученное таким методом разложение может оказаться не самым коротким.

Задание 2. Пример неудачного разложения дроби:

5/121 = 1/25 + 1/757 + 1/763309 + 1/873960180913 + 1/1527612795640934188462225.

Задание 3. И пример более удачного разложения этой же самой дроби:

$5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363$.

Задание 4. (Пример задачи на использование аликвотных дробей из Математического папируса Ринда).

Найти *x* в выражении: $2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/\ 292 + 1/x$.

Решение: Дроби вида *1/n,* где $n \in N$, называются аликвотными.

$1/60 + 1/219 + 1/292 = 1/(3 \cdot 4 \cdot 5) + 1/(3 \cdot 73) + 1/(4 \cdot 73) = (73 + 20 + 15) / 4380 =$

$= 108/4380 = 54/2190 = 27/1095 = 9/365$.

$1/x = 2/73 - 9/365 = (10 - 9)/365 = 1/365 \Rightarrow x = 365$.

Ответ: x = 365.

Задачи на аликвотные дроби составляют обширный класс нестандартных задач, для решения которых нужно проявить не только сообразительность и смекалку, но и прочные знания о свойствах таких дробей. Для разложения аликвотных дробей на сумму или разность двух других аликвотных дробей можно использовать две простейшие формулы:

$1/n = 1/(n + 1) + 1/[n(n + 1)]$ (∗), откуда

$1/[n(n + 1)] = 1/n - 1/(n + 1)$ (∗∗)

Приведем далее ряд задач, которые встречаются на олимпиадах, турнирах и экзаменах, где можно использовать приведенные выше формулы:

Задание 5. Вычислить сумму $S = 1/2 + 1/6 + 1/12 + \ldots + 1/2450$.

Решение: Представим каждую дробь в виде разложения на две другие аликвотные дроби, используя формулу (∗∗):

$1/2 = 1/(1 \cdot 2) = 1/1 - 1/2$; $1/6 = 1/(2 \cdot 3) = 1/2 - 1/3$; $1/12 = 1/3 - 1/4$; … ; $1/2450 = 1/(49 \cdot 50) = 1/49 - 1/50 = 1 - 1/50 = 49/50$.

Ответ: 49/50.

Задание 6. Вычислить сумму $S = 2/(1 \cdot 3) + 2/(3 \cdot 5) + 2/(5 \cdot 7) + \ldots + 2/(99 \cdot 101)$.

Решение: $S = 2/(1 \cdot 3) + 2/(3 \cdot 5) + 2/(5 \cdot 7) + \ldots + 2/(99 \cdot 101) = 1 - 1/3 + 1/3 - 1/5 + 1/5 - 1/7 + \ldots + 1/99 - 1/101 = 100/101$.

Ответ: 100/101.

Задание 7. Представить число 1 в виде суммы а) трех; б) четырех; в) пяти; г) шести слагаемых.

Решение:

а) $1 = 1/2 + 1/2 = [1/(2 + 1) + 1/(2\cdot(2 + 1))] = 1/2 + 1/3 + 1/6$.

б) $1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + [1/(6 + 1) + 1/((6\cdot(6 + 1))] = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42$.

в) $1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1/2 + [1/(3 + 1) + 1/(3\cdot(3 + 1)] + 1/7 + 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1/2 + 1/4 + 1/7 + 1/12 + 1/42$.

г) $1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + (1/3 + 1/6) = 1/2 + 1/3 + (1/7 + 1/42) = 1/2 + (1/4 + 1/12) + 1/7 + 1/42 = 1/2 + 1/4 + 1/12 + 1/42 + (1/8 + 1/56) = 1/2 + + 1/4 + 1/8 + 1/12 + 1/42 + 1/56$.

Задание 8. Найти все натуральные числа a и b, такие что $1/6 = 1/a + 1/b$.

Решение: 1) $1/6 = 1/12 + 1/12$

2) $1/6 = 1/(2\cdot3) = 1/(2\cdot(2 + 3)) + 1/(3\cdot(2 + 3)) = 1/10 + 1/15$.

3) $1/6 = 1/(2\cdot3) = 1/(2\cdot(3 + 1)) + 1/(2\cdot3\cdot(3 + 1)) = 1/8 + 1/24$.

4) $1/6 = 1/(2\cdot3) = 1/(3\cdot(2 + 1)) + 1/(2\cdot3\cdot(2 + 1)) = 1/9 + 1/18$.

5) $1/6 = 1/ (6 + 1) + 1/(6\cdot(6 + 1)) = 1/7 + 1/42$.

Ответ: (12; 12); (10; 15); (8; 24); (9; 18); (7; 42).

Задание 9. Четыре натуральных числа a, b, c и d таковы, что

$1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d$. Могут ли все эти числа быть попарно различны?

Решение: $1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + 1/6 + (1/4 + 1/12) = 1/2 + 1/6 + 1/4 + 1/12$.

Ответ: Да.

Задание 10: Решите в натуральных числах уравнение:

$1/m + 1/n = 1/25$, где $m > n$.

Решение: Знаменатель исходной дроби представляет собой составное число (в виде произведения двух чисел), поэтому количество возможных вариантов замены исходной аликвотной дроби суммой двух аликвотных дробей равно числу пар взаимно простых делителей знаменателя исходной дроби.

Для решения данного уравнения используем формулы (*) и (**).

$1/25 = 1/(25\cdot1) = 1/(25 + 1) + 1/(25\cdot(25 + 1)) = 1/26 + 1/650$;

$1/25 = 1/(5\cdot5) = 1/(5\cdot(5 + 1)) + 1/(5\cdot5\cdot(5 + 1)) = 1/30 + 1/150$.

Ответ: m = 150, n = 30 или m = 650, n = 26.

Задание 11: Представьте число 15/91 в виде суммы нескольких дробей, все числители которых единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

Решение: 1) $15/91 = (15 \cdot 6)/(91 \cdot 6) = 90/546 = 21/546 + 14/546 + 39/546 + 13/546 + 3/546 = 1/26 + 1/39 + 1/14 + 1/42 + 1/182$;

2) $15/91 = (15 \cdot 10)/(91 \cdot 10) = 150/910 = 70/910 + 65/910 + 10/910 + 5/910 = 1/13 + 1/14 + 1/91 + 1/182$.

Использование аликвотных дробей позволяет решать сложные олимпиадные задачи по математике более рациональными способами и расширяет знания по истории развития математики.

Благодаря этому у учащихся развивается нестандартное мышление, что способствует решению ряда нестандартных и олимпиадных математических задач оригинальным способом.